EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

I — 1 SEPTEMBER 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET EXPERIMENT MODERNE ALGEBRA EN ANALYSE ENKELE INDRUKKEN OP DE RIJKS-H.B.S. TE ZWOLLE

door

J. VAN LINT

Zwolle

Door de commissie modernisering leerplan wiskunde zijn voor de cursussen 1965/1966 en 1966/1967 zeven scholen aangewezen als experimenteerscholen voor de algebra en analyse van de bovenbouw, met de bedoeling om te komen tot een programma voor het vak wiskunde I in de bovenbouw van gymnasium en atheneum.

Als uitgangspunt werd genomen een door de commissie opgesteld schema van onderwerpen en een door enkele docenten vervaardigde basistekst. De experimenterende leraren hebben zelf leerlingenteksten met opgaven gemaakt en aan de hand van de opgedane ervaringen eens in de maand van gedachten gewisseld.

De grote hoeveelheid tijd, die de docenten aan deze scholen nodig hebben gehad om de leerlingen uit 4B en 5B, resp. 5β en 6β, die nieuwe onderwerpen bij te brengen, die in de toekomst voor de onderbouw bestemd zijn, is er oorzaak van geweest, dat het aantal onderwerpen dat gedurende het eerste experiment voor het nieuwe programma bestudeerd is, klein was.

A. *Verzamelingen*

We zijn begonnen met een hoofdstuk over verzamelingen, vooral met het oog op het gebruik van de notaties uit de verzamelingsleer. Veel van die leerstof zou eigenlijk reeds eigendom van de leerlingen hebben moeten zijn, bij het binnentreden in de bovenbouw. Om van de nood een deugd te maken, werden nu uit allerlei delen van de algebra en meetkunde opgaven en voorbeelden gehaald, om met behulp van de nieuwe notatie te laten uitwerken.

Het is mij daarbij opgevallen, dat vooral de opgaven over het „invoeren'' en „verduisteren'' van oplossingen bij vergelijkingen en ongelijkheidsopgaven, veel duidelijker uitgelegd kunnen worden met de nieuwe notaties.

Voorbeeld 1

Beschouw de volgende deelverzamelingen van $\mathbb{R}$.

$A = \{x | \sqrt{2x^2 - 4} = x\}$ $\quad$ $B = \{x | 2x^2 - 4 = x^2\}$

$C = \{x | x^2 = 4\}$ $\quad$ $D = \{2, -2\}$

Onderzoek of de volgende beweringen juist zijn

a) $A = B$ $\quad$ b) $B = C$ $\quad$ c) $D \subset A$ $\quad$ d) $A \subset D$

Voorbeeld 2

Beschouw de volgende deelverzamelingen van **R**.

$A = \{x | (x^2 - 2x)(x - 1) \geqq 0\}$ $\quad$ $B = \left\{x \middle| \frac{x^2 - 2x}{x - 1} \geqq 0\right\}$

$C = \{x | x^2 - 2x \geqq 0\}$ $\quad$ $D = \{x | x - 1 > 0\}$

$E = \{x | x^2 - 2x \leqq 0\}$ $\quad$ $F = \{x | x - 1 < 0\}$

a) Onderzoek of $A \subset B$ en of $B \subset A$
b) Bepaal $D \cap E$ en $E \cup F$
c) Onderzoek of $C \cap B = D$
d) Druk B uit in C, D, E en F.

Het maken van deze en soortgelijke vraagstukken is bijzonder nuttig geweest, maar heeft veel tijd in beslag genomen.

Aangezien de variatiemogelijkheden hierbij groot zijn, heb ik vele hiervan uitgeprobeerd en schoot daarbij mijn doel voorbij, aangezien de moeilijkheden, die ontstonden, niet of weinig te maken hadden met de notaties van de verzamelingsleer, maar met reeds vergeten of nog niet eerder begrepen leerstof.

Het werken met venndiagrammen hebben we uiteraard ook uitgebreid geoefend. De gelijkheid van twee verzamelingen kan met venndiagrammen prachtig worden geïllustreerd. Mijn persoonlijke mening is echter, dat zeker in een 4B of 5B klas verschillende malen ook een bewijs van zo'n gelijkheid gegeven moet worden, onafhankelijk van „de plaatjes'' om zodoende het vertrouwen te kweken in het gebruik van die „plaatjes''.

Vragen gesteld door leerlingen, wezen er op dat ze in vroeger jaren goed geleerd hadden, dat een tekening vaak misleidend kan zijn bij een algemeen bewijs. Het feit dat er geen ongerustheid behoeft te zijn bij een goed gebruik van de diagrammen moeten we toch op z'n minst toelichten. Trouwens, de abstracte bewijzen bleken ook zeer nuttig voor het leren van de begrippen doorsnede, vereniging, complementverzameling enz., enz.

Dat uit $x \in (A \cap B)'$ de conclusie getrokken kan worden, dat $x \notin A$ of $x \notin B$ bleek niet eenvoudig te zijn. Misschien moeten we hieruit de conclusie trekken, dat een zekere oefening met „ont-

kenningen" nuttig zou kunnen zijn (zie ook continue functies).

Het vergelijken van de verzamelingen $A \cap (B \cup C)$ met $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ of $(A \cap B)'$ met $A' \cap B'$ werd zeer gewaardeerd, gezien de overeenkomst met bekende bewerkingen met getallen die opgemerkt werd. Bovendien leek het mij nuttig om een al te lichtvaardig gebruik van de nieuwe symbolen te voorkomen.

Algemeen was men het er wel over eens dat:

a) de notaties van de verzamelingsleer alsmede het gebruik van de venndiagrammen gemakkelijk in de onderbouw geleerd kunnen worden;
b) in vele gebieden van de wiskunde op school van deze leerstof nuttig gebruik gemaakt kan worden;
c) het niet nodig is om de verzamelingsleer voor zover wij die nuttig achten in één hoofdstuk te behandelen, maar dat men het beste telkens waar het te pas komt, „de techniek" aan moet brengen.

B. *Relaties*

Bij vele onderwerpen op school maken we gebruik van een relatie, die bestaat tussen de elementen van twee verzamelingen. Het begrip „geordend paar" speelt dan vaak een hoofdrol en het is wel nuttig voor leerlingen om de overeenkomst van de vele problemen te leren inzien, door de paarvorming in een meer algemeen verband te behandelen.

Met behulp van diagrammen kan men m.i. de leerlingen een bijzonder goed inzicht geven in de relatieverzameling.

Voorbeelden.

1. $\{(x, y) \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} | x^2 < 4y^2\}$
2. $\{(x, y) \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} | x^2 + y^2 < 25\} \cap \{(x, y) \; \mathsf{R} \times \mathsf{R} | y^2 < 5\frac{1}{3}x\}$
3. $\{(x, y) \in \mathsf{R} \times \mathsf{R} | x \, . \, y = 4\}$

Hoewel het zoeken van de paren en het tekenen van het diagram al zeer leerzaam is, lijkt het mij noodzakelijk om bij de behandeling van deze stof veel mondelinge reacties op te wekken. Dit niet alleen om de les te verlevendigen, maar ook om de leerlingen te leren praten over de dingen, die ze opschrijven. Het kost op zo'n manier zeer veel inspanning om te zorgen dat ze een vrij ordelijk betoog houden.

Algemeen was men het er wel over eens dat

a) de relaties voor een groot deel in de onderbouw geleerd kunnen worden;

b) de oefeningen met de diagrammen veel steun hebben gegeven bij de bestudering van de analytische meetkunde.

C. *Functies*

Hoewel het begrip functie al lang tot de leerstof behoorde, hebben we onderzocht in hoeverre het nuttig, nodig en belangrijk is, om dit begrip meer algemeen te behandelen. Onderwerpen van discussie waren hierbij o.a. de notatie, de noodzakelijkheid om bij een gegeven functie de definitieverzameling te vermelden en de mogelijkheid om een functie op te vatten als bijzondere relatie of als een afbeelding.

Over deze onderwerpen geef ik nu de mening, die zich bij mij gevormd heeft na enig geëxperimenteer.

1e. De naam van de functie is f en de functiewaarde behorende bij x is $f(x)$. Men moet spreken van de uiterste waarde van $f(x)$ maar over de grafiek van f.

Men schrijft:

$$f : x \rightarrow f(x) \text{ voor elke } x \in D_f$$

waarbij D_f de definitieverzameling van f is.

2e. Een relatie tussen de verzamelingen A en B definiëren we als een deelverzameling van de produktverzameling $A \times B$. Het is uiteraard onverstandig om deze definitie zonder inleiding te geven en daarom begin ik met een aanloopje. We bekijken allerlei voorschriften, die aan elementen van A elementen van B toevoegen, en tekenen in een diagram pijltjes van de $a \in A$ naar alle $b \in B$. die erbij behoren. Er ontstaan zo een aantal paren, maar niet alle mogelijke paren (a, b) enz., enz.

Bij sommige relaties merken we op, dat bij elke $a \in A$ één en niet meer dan één $b \in B$ behoort. Deze bijzondere relaties noem ik functies. Die ene b, die bij een bepaalde a behoort noem ik het beeld van a en ik zeg dat de verzameling A door de relatie (functie) afgebeeld wordt in (of op) de verzameling B. Men zal mij misschien verwijten twee opvattingen door elkaar te halen, maar ik tracht met opzet te laten uitkomen, dat het afbeeldingskarakter en de paarvorming nauw met elkaar in verband staan. Door elkaar gebruik ik dan:

I. een functie van A in B voegt aan elk element van A één en niet meer dan één element van B toe

en:

II. een functie is een relatie tussen A en B waarbij elk element van A in één en niet meer dan één paar voorkomt.

Bij het spreken en laten spreken over functies blijkt, dat er een voorkeur bestaat voor I maar ik heb bij vele opgaven toch dankbaar gebruik kunnen maken van het feit, dat de leerlingen II even goed begrepen en kenden als I (b.v. bij de grafieken en bij de bespreking van inverse functies).

3e. Op de middelbare school lijkt het mij bijzonder nuttig om met de leerlingen af te spreken dat, tenzij anders vermeld wordt, een gegeven functie beschouwd wordt te zijn gedefinieerd voor alle reële getallen, waarvoor het functievoorschrift zinvol is.

Het zijn leerzame oefeningen om de definitieverzamelingen van de gebruikelijke functies „te bepalen" d.w.z. „de grootst" mogelijke verzameling reële getallen waarvan een beeld te bepalen is.

Door het invoeren van een parameter kan men evenwel de tegenstanders van deze opvatting tevreden stellen, zonder verlies van de mogelijkheid om vragen te stellen, die het inzicht omtrent de zin van het voorschrift kunnen vergroten.

Voorbeelden

1. $f : x \rightarrow \sqrt{x-a}$ op $\{x \in \mathbf{R} | x \geqq 2\}$

waarbij a een constant reëel getal is. Welke waarden kan die constante a hebben?

2. $f : x \rightarrow {}^2\log (x^2 - ax)$ op $\{x \in \mathbf{R} | x > 1\}$

waarbij a weer een constant reëel getal is. Welke waarden kan die constante hebben?

Uiteraard is het tevens nuttig voorbeelden te beschouwen van functies, die op het ene interval anders gedefinieerd zijn dan op het andere, zonder dat er sprake is van het niet zinvol zijn van het voorschrift (vergelijk met $|x|$).

Het behandelen van al te „pathologische" gevallen lijkt mij af te raden.

Algemeen was men het er wel over eens dat:

a) de algemene behandeling van de functies nuttig geweest was en zo vroeg mogelijk in de onderbouw moet beginnen;
b) het tekenen en leren gebruiken van grafieken van allerlei functies noodzakelijk is, ondanks het grote aantal uren dat er door in beslag genomen wordt.

D. *Continuïteit*

Het doel van behandeling van de continue functies is voor mij geweest, de invoering van het begrip $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ als de continu makende waarde van $f(x)$ voor $x = c$.

Aangezien de meeste functies, die door ons gebruikt worden continu zijn, kan het begrip pas goed duidelijk gemaakt worden, als enkele discontinue functies besproken zijn. Aan de hand van de grafiek van de functie: $f : x \to x + (x)$, waarbij (x) het grootste gehele getal niet groter dan x voorstelt, is het mij langzaam maar zeker gelukt om met de klas tot een definitie van continuïteit te komen, die uitdrukt wat we in grafieken „zien''. Met zeer eenvoudige voorbeelden kan de equivalentie van de volgende definities zodanig duidelijk gemaakt worden, dat ze reproduceerbaar zijn.

I. Bij elke ε-omgeving W van $f(c)$ is er een δ-omgeving V van c te bepalen zó dat $f(V) \subset W$.

II. Bij elke positieve ε is er een δ zó dat $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ mits $|x - c| < \delta$.

Enkele berekeningen m.b.v. II heb ik laten maken (met b.v. $\varepsilon = \frac{1}{2}$) om de leerlingen te overtuigen van het feit dat de continuïteit van een functie te bewijzen is.

Voorbeeld

$$f : x \to \frac{3x^2 - 6x}{x - 2} \text{ op } \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\} \text{ en } f(2) = 6.$$

Toon aan dat de functie continu is voor $x = 2$.

Dat ook hier oefening met ontkenningen betere resultaten zou kunnen geven, bleek mij bij het onder woorden brengen van het feit dat de volgende functie discontinu is.

$$f : x \to x + 1 \text{ op } \{x \in \mathbb{R} | x \leqq 0\} \quad \text{en}$$
$$f : x \to x^2 \text{ op } \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}.$$

Zonder moeite komt elke leerling tot een opmerking in de geest van: „er zit een sprong in de grafiek'' en dat is in wezen wel hetgeen men in moet zien. Jammer heb ik het gevonden, dat slechts een enkele leerling aanvoelde dat je ook een ε kan zoeken, waarbij geen δ te vinden is.

Stellig lijkt het ons onverstandig om te veel en te diep op deze materie in te gaan. Niettemin mag men niet volstaan met het louter en alleen bekijken van grafiekjes, aangezien het pad geëffend moet worden voor de differentiaalrekening.

Als $\lim_{x \to c} f(x)$ bepaald moet worden, tracht ik de klas een hoopgevend gevoel bij te brengen, als er bij het stiekum invullen van x een breuk met teller en noemer 0 te voorschijn komt. Het opsporen van een gemeenschappelijke factor in teller en noemer levert dan een mogelijkheid om te controleren of onze hoop terecht was.

Voorbeelden

1. Beschouw: $f : x \to \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ op $\{x \in \mathrm{R} | x \neq 2\}$ en bepaal $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$
2. Beschouw: $f : x \to \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ op $\{x \in \mathrm{R} | x \neq 4\}$ en bepaal $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$.

Algemeen was men het er wel over eens dat:

1e. de bespreking van de continue functies verrassend veel geholpen had bij de bestudering van de differentiaalrekening;

2e. de continuïteit vooral met behulp van grafieken moet worden besproken;

3e. op een schriftelijk examen geen moeilijke „ε, δ redeneringen" gevraagd moeten worden.

E. *Differentiaal- en Integraalrekening*

Bij de bespreking van enkele regels voor het differentiëren heb ik enkele lessen gebruikt om aandacht te besteden aan de bewijsmethode met volledige inductie. Het leek mij nuttig i.v.m. de algemene vorming en het gaf ook weer eens een gezellige les, die even buiten de analyse ging. Een poging om de uitdrukking Δx, die slechts historische betekenis heeft, geheel weg te laten is zonder narigheid gelukt, maar heeft toch weinig nut gehad, gezien het feit dat de natuurkundelessen nog doorspekt waren met de Δx.

Het geven van een gedegen theoretische grondslag voor de differentiaalrekening en de integraalrekening, alsmede een flink aantal toepassingen van uiteenlopende soort is van het grootste belang, aangezien van deze stof veel gebruik gemaakt wordt bij verschillende beroepsopleidingen en men aldaar zonder meer aanneemt dat het begrip zo goed is aangebracht, dat er in hoog tempo mee gewerkt kan worden. Wij moeten voorkomen, dat op de middelbare school dit onderwerp afgedaan kan worden met het leren van een paar trucjes voor het bepalen van afgeleiden en uiterste waarden.

Op de experimenteerscholen is verder een geslaagde poging gedaan om het getal e in te voeren en daarna exponentiële en logaritmische functies te differentiëren. Het spreekt bijna vanzelf, dat we ook hier niet geheel exact te werk konden gaan, maar dat wel een redelijke hoeveelheid tijd gebruikt moest worden, om alles zo goed mogelijk te doen.

Met behulp van de grafieken van de functies $f : x \to a^x$ en de aanname, dat de richtingscoëfficiënten van de raaklijnen aan de grafieken in hun snijpunt met de Y-as continu veranderen met a kan

men e definiëren als dat getal waarvoor die richtingscoëfficiënt 1 is. De methode om de natuurlijke logaritme door een integraal in te voeren, heb ik niet geprobeerd, maar die lijkt mij minder eenvoudig voor de leerlingen.

Algemeen was men het er wel over eens dat:

1e. een uitgebreidere behandeling van de analyse dan voorheen mogelijk en nodig is;

2e. de bespreking van de afgeleiden van de exponentiële en logaritmische functie voor de leerlingen, meer dan vroeger, het bevredigende gevoel van een afgerond geheel gaf.

F. *Differentiaalvergelijkingen*

Dank zij de aangebrachte kennis van de natuurlijke logaritmen, hebben we de mogelijkheid om eenvoudige eerste orde differentiaal vergelijkingen in de klas op te lossen kunnen onderzoeken.

Het tekenen van een lijnelementen-veld bleek tegen de verwachtingen van velen in, wel aardig met de leerlingen te doen te zijn, alhoewel het tekenen van een voldoend aantal raaklijnstukjes, om daarmee de grafiek van een oplossing van de differentiaalvergelijking af te leiden, toch een erg tijdrovende bezigheid was. De tekeningen werden niet altijd even netjes gemaakt en een algemene oplossing werd er zelden mee gevonden. De vraag blijft nog open, of het de moeite waard is om aan dit onderwerp nog meer tijd te besteden en zo ja, of er dan betere resultaten te verwachten zijn.

Aangezien de meeste voorbeelden, die binnen ons bereik lagen met behulp van de kettingregel (in omgekeerde volgorde) waren op te lossen, hebben we de leerlingen wel enige vaardigheid bij kunnen brengen in het snel oplossen van differentiaalvergelijkingen met die regel.

Voorbeeld

$$y' \,.\, x + y = 0 \qquad y' \,.\, x = -y \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x}$$

Door integratie vindt men:

$${}^{e}\!\log y = -\,{}^{e}\!\log x + c$$

$$y = \frac{k}{x}$$

Uiteraard is het verstandig de vraagstukken een „natuurkundig luchtje" te geven, al moeten we niet van onze leerlingen gaan eisen,

dat ze bij de wiskundelessen natuurkundig ingeklede vergelijkingen gaan oplossen. Het fysische gedeelte moet slechts dienen om het nut van de vraagstukken aan te tonen en om zodoende het plezier van het speuren naar de oplossing te vergroten.

Algemeen was men het er wel over eens dat:

1e. de differentiaalvergelijkingen voorlopig nog zeer moeilijk examineerbaar zijn;
2e. er een nader onderzoek ingesteld moet worden in het volgende experimentjaar;
3e. een grotere samenwerking met docenten in de natuurkunde zeer plezierig zou zijn.

Tenslotte nog een persoonlijke opvatting over de opgaven, die we maken om de theorie te verduidelijken en die dienen om de onontbeerlijke techniek aan te brengen.

Volgens mij hebben we vaak meer aan een uitvoerige bestudering van één functie gedurende een les, dan aan het oplossen van vele vraagstukken van uiteenlopende soort. Door het invoeren van een parameter kan men een bepaald type functie zodanig onderzoeken, dat het type meer gaat „leven".

Voorbeeld 1

Gegeven:

$$f : x \to x^3 - x^2 - ax \text{ op } \mathbf{R} \text{ waarbij } a \in \mathbf{R}.$$

Gevraagd:

a) Bepaal a zó dat de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(1, -a)$ een hoek van 45° maakt met de positieve X-richting.
b) Bepaal voor $a = 1$ de uiterste waarden van $f(x)$ en teken dan de grafiek van f.
c) Voor welke waarden van a heeft $f(x)$ twee uiterste waarden?
d) Voor welke waarden van a is f een stijgende functie op $\mathbf{R}$.
e) Voor welke waarden van a snijdt de grafiek van f de X-as in drie verschillende punten?

Voorbeeld 2

Gegeven:

Op $V = \{x \in \mathbf{R} | x > \frac{1}{2}\}$ de verzameling functies $f : x \to \dfrac{x - a}{\sqrt{2x - 1}}$ waarbij $a \in \mathbf{R}$.

Gevraagd:

a) Bewijs dat de grafieken van twee willekeurige functies van de verzameling geen snijpunt hebben.

b) Onderzoek of er een waarde van a is zó dat $\lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x)$ eindig is.
c) Bepaal de waarden van a waarvoor f een stijgende functie is op V.
d) Onderzoek of er een waarde van a is waarvoor de functie een uiterste waarde bereikt voor $x = 4$.
e) Teken de grafieken van de functies behorende bij $a = -1$, $a = 0$ en $a = +1$.

Voor schriftelijk werk zijn deze vraagstukken lastiger samen te stellen gezien de grote kans op kettingvragen. Voor mij is het grote voordeel van de behandeling van dit soort opgaven gelegen in de mogelijkheid om leerlingen te leren iets grondig te onderzoeken, structuur te ontdekken en te begrijpen.

Door mijn gebrek aan ervaring heb ik stellig nog vele onderwerpen en opgaven van het nieuwere soort op minder goede en minder vlotte wijze behandeld, maar ik heb met genoegen geëxperimenteerd en geloof dat wij er goed aan doen een iets modernere wiskunde te doceren.

SYMBOLEN

1. *Inleiding.*

Een der meest opvallende uiterlijke kenmerken van „moderne" wiskundeboeken is het veelvuldig optreden van symbolen uit de verzamelingsleer en uit de wiskundige logica, die voorheen nog onbekend, althans minder bekend waren dan nu nog het geval is.

De redactie van *Euclides* heeft van enige zijden het verzoek ontvangen in dit tijdschrift een summier overzicht op te nemen van de meest gangbare symbolen. We voldoen gaarne aan dit verzoek. We hopen daarmee in het bijzonder tal van lezers die bij het toekomstige m.a.v.o. en h.a.v.o. geïnteresseerd zijn, een dienst te bewijzen.

Bij het schrijven van deze artikelen zullen we ons een uiterste beperking moeten opleggen. We geven slechts die symbolen die naar onze mening voor het wiskunde-onderwijs in Nederland van vandaag of morgen van belang kunnen worden geacht. In de bekende *„Grundzüge der Mathematik"*, een Duitse uitgave *„für Lehrer an Gymnasien"* waarvan tot dusver vier delen zijn verschenen, vindt men lange lijsten met honderden symbolen. Zulke lijsten hebben echter alleen betekenis voor hen, die ook de desbetreffende hoofdstukken van genoemd werk lezen.

Om misverstand te weren wijzen we erop, dat er t.a.v. het gebruik van diverse symbolen geen bindende voorschriften bestaan. We mogen echter verwachten, dat het Nederlandse Normalisatie Instituut te zijner tijd normalisatiebladen zal uitgeven die de eenheid in het gebruik van de symbolen kunnen bevorderen. In verband met een en ander zullen we op verschillende plaatsen voor een bepaald begrip meer dan een symbool dienen te geven.

We stellen ons voor korte bijdragen op te nemen over:

I. logische symbolen;
II. symbolen uit de verzamelingsleer;
III. andere symbolen die voor ons wiskunde-onderwijs van belang zijn.

Voor uitvoeriger informatie over wiskundige symbolen verwijzen we naar de volgende titels.

1. C. J. Alders e.a., *Examenopgaven wiskunde voor h.a.v.o.*; Noordhoff, Groningen 1966, p. 22—41.
2. H. Freudenthal, *Exacte logica*; 119 blz., Bohn, Haarlem 1967.
3. F. Goffree e.a., *Rekenen en didactiek*, een leerboek voor aanstaande onderwijzers; Noordhoff, Groningen 1966; p. 24 e.v.
4. G. Krooshof e.a., *Moderne wiskunde* voor algemeen voortgezet onderwijs (experimentele uitgave) I; Wolters, Groningen 1966; p. 9 e.v.
5. G. Papy, *Moderne Wiskunde* I, een schoolboek voor beginners in België, 468 bladz.; Didier, Brussel 1965.
6. A. Tarski, *Inleiding tot de logica*; 259 blz.; Noord-Hollandse Uitgeversmaatschappij, Amsterdam 1953.
7. P. G. J. Vredenduin,
   a. De alverzameling; Euclides 41, p. 97—103;
   b. Over de notatie inzake verzamelingen; Euclides 41, p. 95—96;
   c. De bewijskracht van de diagrammen van Venn en de implicatie; Euclides 42; p. 33—41;
   d. „of"; Euclides 39, p. 106—113;
   e. „dus"; Euclides 39, p. 254—255;
   f. Over het gebruik van „of" en „en" bij het oplossen van ongelijkheden; Euclides 34, p. 193—199;
   g. Als A waar is, dan is B waar; Euclides 39, p. 210—215;
   h. Als . . . dan . . .; Euclides 39, p. 175—181.
8. Joh. H. Wansink, *De taal der verzamelingen; logische aspecten; verzamelingsleer*; in: *Didactische Oriëntatie* I, p. 105—157. Wolters, Groningen 1966.

I

LOGISCHE SYMBOLEN

2. In de wiskunde treden naast symbolen met constante betekenis ook variabelen op.
Tot de vanouds bekende *wiskundige constanten* behoren symbolen als

$$+ \quad - \quad \times \quad : \quad = \quad \log \quad \sin \quad \int$$

Dit zijn alle symbolen voor bepaalde wiskundige *operatoren*.
Tot de wiskundige constanten behoren allereerst de *getalconstanten*:

$$2 \quad \mathrm{e} \quad \mathrm{i} \quad \pi \quad \ldots$$

Tot de wiskundige constanten rekenen we eveneens de volgende symbolen:

$$\neg \quad \vee \quad \wedge \quad \Rightarrow \quad \Leftrightarrow \quad \backslash \quad /$$

die alle *logische operatoren* voorstellen, waarvan de betekenis hieronder nader zal worden aangegeven.
Als variabelen treden in de wiskunde o.a. op de letters:

$$a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, A, B, C, \ldots$$

waarmee bijvoorbeeld elementen uit een getallenverzameling of een puntverzameling worden aangeduid.
De letters f, g, h, ... treden eveneens als variabelen op en stellen veelal functies voor.
In gedrukte tekst pleegt men overeenkomstig de voorschriften van het Nederlands Normalisatie Instituut variabelen cursief te drukken, en constanten en operatoren rechtop; bijvoorbeeld:

$${}^{a}\log x\,,\ \sin x.$$

3. De *negatie* van het oordeel p wordt aangegeven door $\neg p$, door $\sim p$, door $\bar{p}$.
Lees: „niet-p". Het oordeel „$\neg p$ geldt" wordt gelezen: „niet-p geldt".
Stelt p het oordeel „de som van 2 en 2 is gelijk aan 4" voor, d.i. dus het oordeel: „$2 + 2 = 4$", dan betekent $\neg p$ het oordeel „$2 + 2 = 4$ geldt niet", d.i. dus „$2 + 2 \neq 4$".
Let op, dat oordelen uiteen vallen in ware en niet-ware (in geldige en niet-geldige oordeelen).

Voorbeelden.

$2 + 2 = 4$ is een waar oordeel;
$\neg (2 + 2 = 4)$ is een vals (onwaar) oordeel;

$2 + 2 = 5$ is een vals oordeel;
$\neg (2 + 2 = 5)$ is een waar oordeel.

4. De *conjunctie* van de oordelen p en q wordt aangegeven door $p \wedge q$; ook door p & q.
Lees: „p en q".
Voorbeeld. Als p het oordeel „12 is deelbaar door 3" voorstelt en q het oordeel „12 is even", dan stelt $p \wedge q$ de bewering „12 is zowel een drievoud als een even getal" voor.

Opmerking. $p \wedge q$ is een samengesteld oordeel, waarvan p en q de componenten zijn. In de volgende paragrafen vinden we andere samengestelde oordelen. Het al of niet waar zijn van een samengesteld oordeel hangt af van het al of niet waar zijn van de componenten op een wijze, die door zogenaamde „waarheidstabellen" wordt geïllustreerd.
Zie voor deze waarheidstabellen bijv. *Didactische Oriëntatie* I, p. 113.

5. De *disjunctie* van de oordelen p en q wordt aangegeven door $p \vee q$.
Lees: „p of q".
Met $p \vee q$ wordt bedoeld de bewering, dat minstens een van de oordelen p en q waar is, een bewering die uiteraard zelf waar of onwaar kan zijn. Ze is onwaar ingeval de oordelen p en q beide onwaar zijn.
Er is ook een nevenbetekenis van „of" die buiten de wiskunde vrij frequent voorkomt, waarbij het gelijktijdig waar zijn van p en q wordt uitgesloten.
Notatie:

$$p \mathrm{s} q; \text{ ook } p \bigtriangleup q.$$

Lees: „òf p òf q, maar niet p èn q".
Voorbeeld van dit uitsluitende „of":
Ik ga vanavond om 8 uur naar het concert of naar de bioscoop.

6. De *implicatie* van de oordelen p en q wordt aangegeven door

$$p \Rightarrow q.$$

Lees: „p impliceert q", of: „als p, dan q".
De interpretatie van de implicatie levert vaak moeilijkheden op, voor de bespreking waarvan we verwijzen naar de in § 1 aangegeven lectuur. Met $p \Rightarrow q$ wordt bedoeld, dat p niet kan samengaan met $\neg q$.

De implicatie $p \Rightarrow q$ houdt dus niets anders in dan dat we van de vier combinaties

$$(p, q), \quad (p, \neg q), \quad (\neg p, q) \quad \text{en } (\neg p, \neg q)$$

die we kunnen onderscheiden, de tweede wensen te laten vervallen. We hebben dus:

$$p \Rightarrow q \text{ betekent hetzelfde als } \neg (p \wedge \neg q).$$

We noemen p een voldoende voorwaarde voor q en q een nodige voorwaarde voor p.

Opmerking. Naast de implicatiepijl $\Rightarrow$ treffen we ook de enkele pijl $\rightarrow$ aan. We geven er echter de voorkeur aan deze enkele pijl te reserveren voor de afbeeldingen, die bij het functiebegrip een rol spelen.

7. De *bi-implicatie*

$$p \Leftrightarrow q$$

wordt gelezen als:
„p equivalent met q", „p gelijkwaardig met q" of „p dan en slechts dan als q"; ook „p impliceert q en omgekeerd".

$$p \Leftrightarrow q \text{ is een kortere notatie voor } (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p).$$

De bi-implicatie drukt uit dat de oordelen p en q tegelijk waar of tegelijk onwaar zijn. In plaats van bi-implicatie zegt men ook equivalentie.

Ingeval we hebben $p \Leftrightarrow q$, noemen we p een nodige en voldoende voorwaarde voor q en q een nodige en voldoende voorwaarde voor p. We zeggen ook: q geldt dan en dan alleen als p geldt". Hierin slaat „dan" op de implicatie $p \Rightarrow q$ en dan alleen" op de implicatie $q \Rightarrow p$, of op het hiermee gelijkwaardige oordeel $\neg p \Rightarrow \neg q$.

Opmerking. Er zijn voor de uitdrukking „dan en dan alleen" in diverse talen afkortingen beschikbaar. We ontmoeten „ssi" voor het Franse „si et seulement si", „iff" voor het Engelse „if and only if" en „asa" voor het Vlaamse „als en slechts als". Ook komt in België en in Nederland de afkorting „ddan" voor.

8. De *verwerping* van p en van q, geschreven als $p \,/\, q$, wordt gelezen als: „noch p, noch q".
We hebben dus de equivalentie:

$$(p/q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q).$$

Ook is deze verwerping gelijkwaardig met de negatie van de disjunctie van de samenstellende oordelen p en q.

$$(p/q) \Leftrightarrow \neg (p \vee q).$$

9. Ook ontmoeten we nog het samengestelde oordeel p/q in de betekenis van „p en niet-q".
We hebben dus de equivalentie:

$$(p\backslash q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q).$$

10. In de *predikatenlogica* ontmoeten we de zogenaamde kwantoren

$$\forall \text{ en } \exists.$$

$\forall$ heet *al-kwantor, universele kwantor* of *generaliserende kwantor,*
$\exists$ heet *existentiële kwantor.*
Onder predikaten verstaan we logische constructies met een onderwerp (subject) en een gezegde (predikaat) van bijvoorbeeld de volgende soort:

$$x \text{ is deelbaar door } 3;$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0;$$
$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

In een predikaat treden een of meer variabelen op, hier de x en de y. Is $A(x)$ een predikaat met de variabele x erin, bijvoorbeeld „x is deelbaar door 3 en deelbaar door 2" en is de variabele x element van de verzameling

$$V = \{18,\ 48,\ 60,\ 120\}$$

dan betekent $\forall_x A(x)$, dat voor elke x uit de beschouwde verzameling V de bewering $A(x)$ geldt.

Opmerking. Voor verdere informatie over verzamelingsbegrippen wordt verwezen naar het tweede artikel § 13 e.v.

Het symbool

$$\forall_x A(x)$$

wordt gelezen als:
„voor alle x geldt de bewering $A(x)$".
Is $B(x)$ het predikaat „x is een vijfvoud, maar geen achtvoud", en is x weer element van de hierboven genoemde verzameling y, dan geldt:

$$\exists_x B(x).$$

Dit symbool wordt gelezen als: „er is een element van de verzameling V, waarvoor $B(x)$ geldt".

$B(60)$ betekent nl.: „60 is een vijfvoud maar geen achtvoud” en dit is een waar oordeel.
In onze voorbeelden betekende $\underset{x}{\forall} A(x)$ de geldigheid van

$$A(12) \wedge A(48) \wedge A(60) \wedge A(120)$$

Men gebruikt daarom ook wel het symbool $\underset{x}{\wedge} A(x)$ in plaats van $\underset{x}{\forall} A(x)$
Verder betekende $\underset{x}{\exists} B(x)$ de geldigheid van

$$B(12) \vee B(48) \vee B(60) \vee B(120).$$

Men gebruikt daarom ook wel het symbool $\underset{x}{\vee} B(x)$ in plaats van $\underset{x}{\exists} B(x)$

Opmerking. De variable in de beide kwantoren wordt ook wel naast de kwantor geschreven i.p.v. eronder of erin.

11. De ontkenningen van formuleringen waarin kwantoren optreden kunnen in de klas nog al eens moeilijkheden opleveren.
De ontkenning van $\underset{x}{\forall} A(x)$ is niet $\underset{x}{\forall} \neg A(x)$, maar

$$\underset{x}{\exists} \neg A(x).$$

De ontkenning van $\underset{x}{\exists} A(x)$ is niet $\underset{x}{\exists} \neg A(x)$, maar

$$\underset{x}{\forall} \neg A(x).$$

De lezer illustrere deze bewering door zelf gekozen voorbeelden.

12. *Overzicht van de besproken logische symbolen.*

negatie van p:	$\neg p$, $\bar{p}$,
conjunctie van p en q:	$p \wedge q$; $p \,\&\, q$
disjunctie van p en q:	$p \vee q$
implicatie:	$p \Rightarrow q$
bi-implicatie of equivalentie:	$p \Leftrightarrow q$
verwerping:	p/q
conjunctie van p en $\neg q$:	$p \backslash q$.

Wansink.

OVER DE WORTELVERGELIJKING $\sqrt{a} = b$

door

R. Kooistra

Ede

Wijdenes spreekt in zijn leerboek Lagere Algebra II, blz. 244 (8e druk; bestemd voor de opleiding voor de akte wiskunde l.o.), kort en duidelijk uit:

De vergelijking $\sqrt{a} = b$ *is gelijkwaardig met* $a = b^2$, $b \geqq 0$

hetgeen korter te noteren is als: $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow (a = b^2 \wedge b \geqq 0)$. (Opmerkelijk is het, dat de schrijver zelf bij het voorbeeld $\sqrt{x - 3} = 15 - x$ zich niet aan deze uitspraak houdt, door naast $x \leqq 15$ toch ook nog $x \leqq 3$ als voorwaarde te noteren).

Het komt mij voor, dat deze manier van oplossen van dit type wortelvergelijking bij het v.h.m.o. niet algemeen wordt toegepast, maar dat de z.g. „knos-methode" (kwadrateren, na oplossen substitueren) nog veel opgang maakt. In de schoolleerboeken althans ben ik nimmer de bovenvermelde „gelijkwaardigheidsmethode" tegengekomen. Nu zijn in de onderbouw tegen de knosmethode niet zoveel bezwaren in te brengen. We nemen een voorbeeld:

$\sqrt{x - 3} = x - 5 \Rightarrow x - 3 = x^2 - 10x + 25 \Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \vee x = 7$

Substitutie doet zien dat alleen $x = 7$ voldoet, omdat $x = 4$ een onjuistheid oplevert (niet door het optreden van een irreële wortel in het linkerlid, maar door het negatief worden van het rechterlid). Sierlijker is m.i. de gelijkwaardigheidsmethode:

$$\begin{aligned}\sqrt{x - 3} = x - 5 &\Leftrightarrow x - 3 = (x - 5)^2 \wedge x \geqq 5\\ &\Leftrightarrow x^2 - 11x + 28 = 0 \wedge x \geqq 5\\ &\Leftrightarrow (x = 4 \vee x = 7) \wedge x \geqq 5\\ &\Leftrightarrow x = 7.\end{aligned}$$

Bij de knos-methode zal het de meeste leerlingen ontgaan, dat men *nimmer* bij substitutie een irreële wortel in het linkerlid zal verkrijgen. Dit nu is het essentiële punt in de gelijkwaardigheidsmethode, dat deze laat zien:

De voorwaarde $a \geqq 0$ *is overbodig* omdat $a = b^2$ de voorwaarde $a \geqq 0$ inhoudt: $a = b^2 \Rightarrow a \geqq 0$.

De leerling uit de bovenbouw moet dit m.i. weten, met name bij wortelvergelijkingen *met een parameter*. Hij is zo gewend bij de behandeling van functies te schrijven: $\sqrt{x-p}$, eis $x \geqq p$, dat hij het eenvoudig niet laten kan bij de oplossing van $\sqrt{a} = b$ ook $a \geqq 0$ als voorwaarde te noteren.

Bij wortelvergelijkingen zonder een parameter is dit niet zo bezwaarlijk. Maar nemen we nu eens de wortelvergelijking $\sqrt{x^2+p} = x - 3$ van het eindexamen-h.b.s. 1957, waarin gevraagd werd:

Voor welke waarden van p is de vergelijking $\sqrt{x^2+p} = x - 3$ vals? (Schrift. opgaven v.h. eindexamen h.b.s.-b, Ir. Kruytbosch, Ir. Richter, blz. 15).

We vinden vlot:

$$\sqrt{x^2+p} = x - 3 \Leftrightarrow x^2 + p = x^2 - 6x + 9 \wedge x \geqq 3$$
$$\Leftrightarrow p = -6x + 9 \wedge x \geqq 3 \Rightarrow p \leqq -9,$$

zodat het gevraagde antwoord luidt: $p > -9$.

De leerling echter, opgevoed bij de knos-methode, zal x oplossen (als we er tenminste van mogen uitgaan, dat hij inderdaad begint met het gewoon oplossen van de gegeven vergelijking), vindt $x = \frac{3}{2} - \frac{1}{6}p$ en zal daarna ongetwijfeld naast de voorwaarde $x \geqq 3$ ook de overbodige voorwaarde $x^2 + p \geqq 0$ onderzoeken, om dan verrast of niet verrast te vinden, dat het met

$$x^2 + p = (\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{6}p)^2 + p = (\tfrac{1}{6}p + \tfrac{3}{2})^2 \geqq 0$$

gelukkig wel goed zit en dit hem niet nog een voorwaarde voor p oplevert.

De eerlijkheid gebiedt ons te schrijven, dat het in bijzondere gevallen nuttig kan zijn, toch op $a \geqq 0$ te letten. Het eindexamen algebra 1965 gaf de vergelijking: $\sqrt{-3x^2 + 12x} = x - 4$.

Uit $(a \geqq 0 \Leftrightarrow 0 \leqq x \leqq 4) \wedge (b \geqq 0 \Leftrightarrow x \geqq 4)$ volgt direct $x = 4$; kwadratering kan hier dus achterwege blijven.

Zo'n bijzonder geval is ook de vergelijking $\sqrt{7x - 21} = 2 - x$, waarbij $x \geqq 3 \wedge x \leqq 2$ direct doet zien, dat de vergelijking vals is.

Het eindexamen algebra 1966 gaf een wortelvergelijking van het type $\sqrt{a} = a$, waarbij *elke* voorwaarde gemist kan worden. Immers: $\sqrt{a} = a \Leftrightarrow a = a^2$, omdat, het zij nogmaals gezegd,

$$a = a^2 \Rightarrow a \geqq 0.$$

Ten aanzien van de wortelvergelijking $\sqrt{a} = b$ mogen we dus vaststellen:

$$(\sqrt{a} = b) \Leftrightarrow (a = b^2 \wedge b \geqq 0) \Leftrightarrow a = b^2 \wedge a \geqq 0 \wedge b \geqq 0).$$

EEN OPMERKING OVER P. LEVY'S UITBREIDING VAN DE STELLING VAN ROLLE

door

W. A. J. LUXEMBURG

Pasadena, Calif.

In het februarinummer van Euclides van dit jaar komt een bespreking voor van de heer Hirschfeld over de koordlengten van continue functies. Stelling 2 en Stelling 3 van dit artikel zijn afkomstig van P. Levy en zijn verschenen in een artikel in de C.R. Acad. Sci. Paris, 198 (1934) met de titel „*Sur une généralisation du theorème de Rolle*" blz. 424-425. Voor een elementaire bespreking van deze stellingen van Levy verwijzen we de lezer nog naar het boekje van R. P. Boas Jr., *A primer of real functions*, Carus Math. Monograph 13, beginnende op blz. 79.[1])

De topologische achtergrond van de stelling van Levy werd ontdekt door H. Hopf en werd gepubliceerd in het tijdschrift Comm. Math. Helv. 9 (1937) met de titel „*Ueber die Sehnen ebener Kontinuen und die Schleifen geschlossener Wege*" op blz. 303—319. De stellingen die door Hopf werden bewezen kunnen in het kort als volgt worden samengevat.

Stel dat C een vlakke, begrensde, gesloten en samenhangende puntverzameling is en stel dat in het vlak een bepaalde lijn l is gekozen. Onder $l(C)$ verstaan we de verzameling van lengten van koorden van C die parallel zijn met l. De complementaire verzameling van $l(C)$ in de verzameling van de niet-negatieve reële getallen geven we aan met $l_c(C)$. Verder spreken we af dat een verzameling A van reële getallen additief genoemd zal worden als uit $x, y \in A$ volgt $x + y \in A$.

De belangrijkste stellingen van Hopf kunnen nu als volgt geformuleerd worden.

STELLING 1 (H. Hopf). *Voor iedere vlakke, begrensde, gesloten en samenhangende puntverzameling C is de verzameling $l_c(C)$ additief.*

Het is duidelijk dat hieruit de stelling van Levy kan worden afgeleid. Inderdaad, als f continu is in het interval $a \leqq x \leqq b$ $(a < b)$, $f(a) = f(b)$ en $(b - a)/n$ $(n = 2, 3, \cdots)$ is geen horizontale koordlengte van de grafiek van f dan is volgens de stelling van Hopf ook $b - a = (b - a)/n + (b - a)/n + \cdots + (b - a)/n$ (n-

[1]) Ook Prof. Dr. G. R. Veldkamp wijst ons op dit „fraaie, weinig omvangrijke, doch uiterst inhoudrijke" werkje.

termen) geen horizontale koordlengte van de grafiek van f hetgeen in tegenspraak is met $f(a) = f(b)$.

Voorts bewees Hopf dat Stelling 1 nog als volgt kan worden omgekeerd.

STELLING 2. *Voor iedere open niet lege additieve verzameling A van positieve reële getallen bestaat er een vlakke, begrensde, gesloten en samenhangende puntverzameling C met de eigenschap $l_c(C) = A$. Er bestaat zelfs een continue functie die gedefinieerd is in een begrensd en gesloten interval waarvan de grafiek deze eigenschap heeft.*

Het is ook eenvoudig om na te gaan dat Stelling 3 van het artikel van Hirschfeld uit deze stelling volgt. Het is misschien niet zonder interesse om in dit verband op te merken dat het niet moeilijk is om een continue functie f in het interval $0 \leqq x \leqq 1$ in gesloten vorm aan te geven die voldoet aan $f(0) = f(1)$ en die geen horizontale koorde heeft van een gegeven lengte $a = 1/n$ $(n = 2, \cdots)$. Inderdaad, de functie $f(x) = \sin^2(\pi x)/a - x \sin^2(\pi/a)$, $0 \leqq x \leqq 1$, is zo'n functie hetgeen de lezer zelf gemakkelijk kan verifiëren. Merk nog op dat f analytisch is.

Voor de bewijzen van de stellingen van Hopf verwijzen we de lezer naar het hierboven vermelde artikel van Hopf.

P. Levy kondigde zijn stelling aan als een uitbreiding voor continue functies van de bekende stelling van Rolle voor differentieerbare functies. We zullen nu van deze gelegenheid gebruik maken om de lezer te laten zien dat de stelling van Rolle direct af te leiden is uit de stelling van P. Levy. Daarbij komt dan de stelling van Rolle te voorschijn als een direct gevolg van de tussenwaardestelling van Bolzano voor continue functies. De bewijzen van de stelling van Rolle maken meestal gebruik van de stelling van Weierstrass die beweert dat een continue functie op een begrensd en gesloten interval een extreme waarde aanneemt.

Alvorens over te gaan tot het formuleren en het bewijzen van de stelling van Rolle zullen we eerst een kleine verscherping van de stelling van Levy voor de grafieken van continue functies geven.

STELLING 3. *Is f continu in $a \leqq x \leqq b (a < b)$ en is verder $f(a) = f(b)$, dan bestaan er rijen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ van reële getallen die de volgende eigenschappen hebben $a = a_0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b_0 = b$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/(n + 3)$ en $f(a_n) = f(b_n)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$.*

Bewijs. We zullen eerst bewijzen dat als k een natuurlijk getal is $\geqq 3$ dan bestaan er getallen c en d zodanig dat $a < c < d < b$, $d - c = (b - a)/k$ en $f(c) = f(d)$. Daartoe stellen we
$g(x) = f(x + (b - a)/k) - f(x)$, $a \leqq x \leqq b - (b - a)/k$. Nu geldt

$\sum_{i=0}^{k-1} g((b-a)i/k) = f(b) - f(a) = 0$. Dus óf $g((b-a)i/k) = 0$, $i = 0, 1, 2, \cdots, k-1$, óf er bestaan natuurlijke getallen i_1 en i_2 met $g((b-a)i_1/k) < 0$ en $g((b-a)i_2/k) > 0$. In het eerste geval kunnen we dan daar $k \geqq 3$, $c = a + (b-a)/k$ en $d = a + 2(b-a)/k$ kiezen. In het tweede geval daar g continu is volgt uit de tussenwaardestelling onmiddellijk dat er een getal x_0 bestaat zodanig dat $a < x_0 < b$ en $g(x_0) = 0$. Dan kiezen we $c = x_0$ en $d = x_0 + (b-a)/k$. Door achtereenvolgens deze opmerking toe te passen verkrijgen we de stelling. Q.E.D.

We zullen nu overgaan tot de formulering en het bewijs van de stelling van Rolle.

STELLING 4 (Rolle). *Is f in $a \leqq x \leqq b$ $(a < b)$ continu en in $a < x < b$ differentieerbaar, is verder $f(a) = f(b)$, dan is er tenminste een getal x_0 zodanig dat $a < x_0 < b$ en $f'(x_0) = 0$.*

Bewijs. Volgens Stelling 3 bestaan er rijen $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zodanig dat $a = a_0 < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b_0 = b$, $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/(n+3)$ en $f(a_n) = f(b_n)$, $n = 1, 2, \cdots$. Hieruit volgt onmiddellijk dat de stijgende rij $\{a_n\}$ en de dalende rij $\{b_n\}$ convergent zijn en dat hun limieten gelijk zijn. We geven nu die gemeenschappelijke limiet aan met x_0. Dan is $a < x_0 < b$. We zullen nu laten zien dat de afgeleide f' van f nul is in x_0. Daartoe stellen we $\alpha_n = (f(x_0) - f(a_n))/(x_0 - a_n) - f'(x_0)$ en $\beta_n = (f(b_n) - f(x_0))/(b_n - x_0) - f'(x_0)$, $n = 1, 2, \cdots$. Daar f differentieerbaar is in x_0 kunnen we concluderen dat $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Als we nu de eenvoudige identiteiten $f(x_0) - f(a_n) = (x_0 - a_n)f'(x_0) + (x_0 - a_n)\alpha_n$, $f(b_n) - f(x_0) = (b_n - x_0)f'(x_0) + (b_n - x_0)\beta_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ optellen en gebruik maken van $f(a_n) = f(b_n)$ $(n = 1, 2, \cdots.)$ dan verkrijgen we de vergelijking $0 = (b_n - a_n)f'(x_0) + (x_0 - a_n)\alpha_n + (b_n - x_0)\beta_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Dus $(*)$ $f'(x_0) = -\alpha_n(x_0 - \alpha_n)/(b_n - a_n) - \beta_n(b_n - x_0)/(b_n - a_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$. Daar $a_n < x_0 < b_n$ geldt $0 < (x_0 - a_n)/(b_n - a_n) < 1$ en $0 < (b_n - x_0)/(b_n - a_n) < 1$. Dus volgt uit $(*)$ de schatting $|f'(x_0)| \leqq |\alpha_n| + |\beta_n|$, n $= 1, 2, \cdots$. Uit $\lim |\alpha_n| = \lim |\beta_n| = 0$ en $f'(x_0)$ is onafhankelijk van n volgt dat $f'(x_0) = 0$ Q.E.D.

Op de gebruikelijke wijze leidt men dan de middelwaardestelling af door bij de functie een geschikt gekozen lineaire functie op te tellen.

Tenslotte merken we nog op dat de stelling van Levy uitgebreid kan worden tot vectorwaardige functies. Een andere uitbreiding van de stelling van Levy is afkomstig van N. J. van Warmelo en is te vinden in de Wiskundige Opgaven met de oplossingen, 20 (1955) opgave 39.

KORREL CXL

Rij en reeks

In de discussienota, die uitgegaan is van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde komt hier en daar de term „reeks" voor. Enige toelichting is hier wel gewenst om verwarring te voorkomen.

Vele lezers kennen de voorgeschiedenis. Vroeger werd in ons onderwijs de term „reeks" vaak op onjuiste wijze gebruikt en werden reeksen en rijen met elkaar verward. Studenten merkten later, dat hun hoogleraar onder een reeks iets anders verstond dan hun voormalige leraren. Het was dan ook begrijpelijk, dat de nomenclatuurcommissie van Wimecos en Liwenagel van het hoger onderwijs het verzoek kreeg de nomenclatuur aangaande rij en reeks zo te regelen, dat geen discrepantie tussen middelbaar en hoger onderwijs zou blijven bestaan. De commissie heeft naar een oplossing gezocht, die zowel wetenschappelijk als didactisch verantwoord was. Het is haar niet gelukt een dergelijk gebruik van de term „reeks" te propageren, dat aan beide eisen voldaan was. Ze heeft toen de knoop doorgehakt en voorgesteld zich bij het middelbaar onderwijs te beperken tot het gebruik van de term „rij".

Voor het middelbaar onderwijs had deze oplossing uiteraard geen enkel bezwaar. Degene, die later wiskundige vakliteratuur onder ogen kreeg, werd echter nu geconfronteerd met reeksen, convergente reeksen, divergente reeksen, sommen van reeksen, zonder dat het middelbaar onderwijs hem voldoende basis verschaft had deze termen te begrijpen. Door velen uit het hoger onderwijs werd de oplossing, die door de nomenclatuurcommissie gekozen was, dan ook niet met gejuich begroet.

Prof. van der Blij heeft een oplossing gevonden om uit de impasse te geraken. Omdat leraren nu eenmaal meer tijd hebben dan hoogleraren, heeft hij mij verzocht zijn oplossing in Euclides te willen toelichten. (Om misverstand te voorkomen vermeld ik, dat deze fraaie oplossing dus in genendele van mij afkomstig is; de door de nomenclatuurcommissie gepropageerde oplossing daarentegen wel.) Van der Blij stelt het volgende voor.

Voer in de onderbouw van het vwo de term „rij" in. Een rij is, zoals bekend, een speciaal soort functie, namelijk een functie gedefinieerd op de verzameling van de natuurlijke getallen. Praat niet over reeksen.

In de bovenbouw komt het limietbegrip ter sprake. Hier kan voor het eerst over de limiet van een rij gesproken worden en hier zal men dus ook convergentie en divergentie van rijen definiëren. Daarmee is over reeksen nog niets gezegd.

De moeilijkheid, waarmee de nomenclatuurcommissie zat, is het geven van een verantwoorde definitie van een reeks.[1]) Van der Blij omzeilt dit op handige wijze. Hij definieert helemaal niet, wat een reeks is. Wat hij definieert is alleen:

a. convergente reeks, b. som van een convergente reeks, c. divergente reeks.

Zijn definities luiden:

a. Men zegt, dat $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ een *convergente reeks* is, als de rij.

$$t_1,\ t_1 + t_2,\ t_1 + t_2 + t_3, \dots \qquad (1)$$

convergeert.

b. Als $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ een convergente reeks is, noemt men de limiet van (1) de *som van de reeks*.

c. Men zegt, dat $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ een *divergente reeks* is, als de rij (1) divergeert.

Inderdaad, deze definities houden juist datgene in, wat de aanstaande student tot zijn beschikking moet hebben.

Wie in de toelichtingen van bovengenoemde discussienota hier en daar de term „reeks'' tegenkomt, moet daarbij dus aan bovenstaande interpretatie denken. Hopelijk wordt door deze korrel voorkomen, dat we in de oude fouten terugvallen.

Oosterbeek P. G. J. Vredenduin

WIMECOS

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden hun contributie voor het verenigingsjaar 1967-1968 ten bedrage van f 9.— (inclusief abonnement op Euclides) te storten of over te maken op postrekening 143917 te name van Wimecos, Amsterdam. Leden die Euclides op andere wijze ontvangen betalen een contributie van f 3,50.

---

[1]) Wil men de term "reeks" definiëren, dan vervalt men in de definitie: onder de *reeks* $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ verstaat men de rij $t_1, t_1 + t_2, t_1 + t_2 + t_3, \dots$. Deze definitie van een reeks als bijzonder soort rij heeft een voor het vwo onverteerbare structuur.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. dr. O. BOTTEMA

Delft

LXIX. Een bijzondere boldriehoek.

De boldriehoeksmeetkunde, om haar praktische toepassingen uiteraard een onmisbaar hulpmiddel in de sterrenkunde, de zeevaart en het landmeten, is als autonoom hoofdstuk der wiskunde sinds lang *passé*. Op onze gymnasia behoorde zij nog tot 1920 tot het programma en voor het KI examen was zij tot het formele verscheiden van deze middelbare akte een verplicht onderdeel. De vormende waarde van deze, vrijwel geheel tot een onoverzichtelijke en moeilijk te onthouden verzameling goniometrische formules gedegenereerde discipline, was gering. Voor wie er zonder bijgedachten kennis van neemt, kan zij om een aantal vernuftige en elegante resultaten, zoals bijvoorbeeld de klassieke theorema's van L'Huilier en Lexell, een zekere bekoring behouden, waarbij wij dan nog afzien van haar nauwe relatie met een der niet-Euclidische meetkunden.

Wij beperken ons zoals gebruikelijk tot boldriehoeken waarvan elk element kleiner is dan π.

In een boldriehoek ABC geldt de sinusregel

$$\frac{\sin \alpha}{\sin a} = \frac{\sin \beta}{\sin b} = \frac{\sin \gamma}{\sin c} \tag{1}$$

en deze vaste verhouding wordt wel de *modulus* van de driehoek genoemd.

Bij een onderzoek naar de zogenaamde versnellingsassen in de instantane spherische kinematica [1]), dat hier verder niet ter zake doet, ontmoet men boldriehoeken waarvan deze modulus gelijk aan één is; driehoeken dus waarvan elk element gelijk is aan of het supplement is van het overstaande element. Hier volgen enkele opmerkingen over deze categorie van driehoeken.

[1]) O. Bottema, Acceleration axes in spherical kinematics. Transactions of the ASME, Journal of Engineering for Industry **87** (1965), 150-153.

Erg interessant blijkt de figuur, in tegenstelling tot een gerechtvaardigd vermoeden, niet te zijn. Dat blijkt wel hieruit dat men er noch bij Todhunter en Leathem [2]), noch in Versluys-Wijdenes [3]), voor zover ik zie iets over vindt; Schuh [4]) geeft in een vraagstuk enige eigenschappen.

Een driehoek van de genoemde soort wordt reeds verkregen door één paar overstaande elementen gelijk (of supplementair) te nemen; er zijn dus ∞^2 van deze driehoeken.

Een eerste vraag die zich voordoet is die naar de mogelijkheid, dat elk element *gelijk* is aan het overstaande. Zij wordt positief beantwoord door de gelijkbenige driehoek, waarvan zowel de opstaande zijden als de basishoeken recht zijn. Wij zullen echter zien dat het bij dit bijzondere geval blijft.

Veronderstel daartoe dat de boldriehoek noch rechthoekig, noch gelijkbenig is en dat twee paren overstaande elementen gelijk zijn: $a = \alpha$, $b = \beta$. Een der vermaarde formules (of zoals men placht te zeggen: analogieën) van Delambre luidt

$$\frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)}{\cos \frac{1}{2} \gamma} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a - b)}{\sin \frac{1}{2} c} \tag{2}$$

Uit de veronderstellingen volgt dus $\cos \frac{1}{2}\gamma = \sin \frac{1}{2}c$, of wel $c + \gamma = \pi$; het derde paar is dus supplementair. Zijn twee paren supplementair: $a + \alpha = b + \beta = \pi$, dan geeft dezelfde formule (2) als enige mogelijkheid $a = b$, wat wij hadden uitgesloten. Wij hebben dus (als wij het geval van twee paren van rechte elementen uitsluiten) dat voor een driehoek met modulus één geldt: *twee paren overstaande elementen zijn gelijk, het derde paar is supplementair.*

Dit resultaat verbreekt de harmonie die door het gegeven scheen te worden beloofd.

Wij zullen aannemen dat $a = \alpha$, wat aan de algemeenheid niet te kort doet.

Volgens de eerste cosinusregel is

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha \tag{3}$$

wat in ons geval leidt tot

$$\cos a = \frac{\cos b \cos c}{1 - \sin b \sin c} \tag{4}$$

---

[2]) I. Todhunter and J. G. Leathem, Spherical trigonometry (London, 1907).

[3]) P. Wijdenes, Boldriehoeksmeting (Groningen, 1950).

[4]) F. Schuh, Leerboek der boldriehoeksmeting ('s-Gravenhage, 1940), blz. 114.

waardoor de derde zijde a bij gegeven b en c bepaald is. Wij voeren nu in

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = v_1, \qquad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - c\right) = v_2 \tag{5}$$

zodat

$$\sin b = \frac{1 - v_1^2}{1 + v_1^2}, \ \cos b = \frac{2v_1}{1 + v_1^2}, \ \sin c = \frac{1 - v_2^2}{1 + v_2^2}, \ \cos c = \frac{2v_2}{1 + v_2^2} \tag{6}$$

terwijl

$$-1 < v_1 < 1, \qquad -1 < v_2 < 1$$

Uit (4) volgt dan

$$\cos a = \frac{4v_1 v_2}{(1 + v_1^2)(1 + v_2^2) - (1 - v_1^2)(1 - v_2^2)} = \frac{2v_1 v_2}{v_1^2 + v_2^2} \tag{7}$$

en, veronderstellend dat $v_2^2 > v_1^2$:

$$\sin a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{v_1^2 + v_2^2}$$

zodat wij na invoering van de drie homogene parameters u_i door

$$u_1 : u_2 : u_3 = 1 : v_2 : v_1$$

verkrijgen:

$$\cos a = \frac{2u_2 u_3}{u_2^2 + u_3^2}, \ \cos b = \frac{2u_3 u_1}{u_3^2 + u_1^2}, \ \cos c = \frac{2u_1 u_2}{u_1^2 + u_2^2} \tag{9}$$

$$\sin a = \frac{u_2^2 - u_3^2}{u_2^2 + u_3^2}, \ \sin b = -\frac{u_3^2 - u_1^2}{u_3^2 + u_1^2}, \ \sin c = \frac{u_1^2 - u_2^2}{u_1^2 + u_2^2} \tag{10}$$

met

$$u_1^2 > u_2^2 > u_3^2 \tag{11}$$

Verder volgt uit

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$

en de overeenkomstige formule voor $\cos c$, door substitutie van (9) en (10):

$$\begin{aligned} \cos \beta &= -\cos b, & \sin \beta &= \sin b \\ \cos \gamma &= \cos c, & \sin \gamma &= \sin c \end{aligned} \tag{12}$$

Door (9), (10) en (12) zijn de zijden en de hoeken van een boldriehoek met modulus één uitgedrukt in de drie homogene para-

meters u_1, u_2 en u_3, die aan de ongelijkheden (11) voldoen. Daarbij is $a = \alpha$ en $c = \gamma$, terwijl b en β elkaars supplement zijn. Dit laatste, uitzonderlijke paar correspondeert zoals men ziet met de parameter u_2 die in (11) de *middelste* plaats in neemt.

Over de vraag of een element scherp is of stomp wordt door het teken van de cosinus beslist. Zijn alle u_i positief dan heeft de boldriehoek scherpe zijden (en één stompe hoek); voor $u_1 > 0$, $u_2 > 0$, $u_3 < 0$ zijn a, b en α stomp, de andere elementen scherp; voor $u_1 > 0$, $u_2 < 0$, $u_3 > 0$ zijn a, c, α, β en γ stomp en alleen b scherp. Daarmee zijn alle gevallen behandeld.

Door Study is een diepgaand onderzoek ingesteld naar de betrekkingen tussen boldriehoeken, orthogonale matrices en elliptische functies. Zijn resultaten, ver uitgaande buiten de begrenzing van deze elementaire notitie zijn in een uitvoerig en met zijn bekende zorgvuldigheid gecomponeerd geschrift vastgelegd[5]); een goed resumé daarvan vindt men bij Sommer[6]). Een der doeleinden is daarbij de goniometrische functies van de elementen van een boldriehoek te schrijven als rationale functies van (vier) homogene parameters, waardoor alle formules der trigonometrie tot identiteiten gereduceerd worden. Van deze schrijfwijze zijn onze formules (9), (10) en (12) voor onze bijzondere driehoeken een voorbeeld. Boldriehoeken worden door Study afgebeeld op de punten van (een deel van de) projectieve driedimensionale ruimte. Ons speciaal geval komt bij hem niet voor; de driehoeken met modulus één corresponderen met een deelverzameling in de afbeeldingsruimte, maar door de asymmetrie van onze figuur (de uitzonderingspositie van het paar b, β) komt men, voor zover ik zie, niet tot eenvoudige uitspraken. Met een boldriehoek komt bij Study ook een orthogonale matrix $||a_{ij}||$ overeen; voor onze driehoeken zijn dat die waarvoor $a_{12} = a_{21}$, $a_{23} = a_{32}$, $a_{13} = - a_{31}$ waarin zich opnieuw de asymmetrie aftekent. Tenslotte is er samenhang met elliptische functies; Lagrange merkte reeds een formele overeenkomst op tussen de cosinusregel der boltrigonometrie en wat men later het additietheorema voor de functies van Jacobi is gaan noemen. Dit geeft aanleiding om de elementen van een boldriehoek uit te drukken door elliptische functies met twee parameters, waarbij dan de modulus k van deze functies gelijk is aan de constante verhouding

[5]) E. Study, Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitionen und elliptische Funktionen. (Abh. Königl. Sächs. Ges. d. W; **20**, Leipzig, 1893), 83-232.

[6]) J. Sommer, Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus. Encykl. Math. Wiss. Bnd. III, 1, Heft 5 (Leipzig, 1914) 848-858.

$\frac{\sin \alpha}{\sin a}$ (resp. het omgekeerde daarvan). Voor onze driehoeken is $k = 1$; de elliptische functies degenereren dan tot hyperbolische functies. Inderdaad, als men (a en c scherp onderstellend) invoert $\sin a = \text{th}\, p$, $\sin c = \text{th}\, q$ en dus $\cos a = \text{ch}^{-1}\, p$, $\cos c = \text{ch}^{-1}\, q$ dan vindt men met de cosinusregel:

$$\sin b = \text{th}\ (p + q),\ \cos b = \text{ch}^{-1}\ (p + q)$$

Een aantal formules voor de algemene boldriehoek krijgen voor onze bijzondere driehoek een eenvoudiger gedaante. Wij noemen de volgende, waarbij E het exces is en R, resp. r de stralen zijn van de om- en de ingeschreven cirkel:

$$\sin \tfrac{1}{2}E = 2 \sin \tfrac{1}{2}a.\ \sin \tfrac{1}{2}b.\ \sin \tfrac{1}{2}c$$
$$\text{cotg}\, R = 2 \cos \tfrac{1}{2}a.\ \cos \tfrac{1}{2}b.\ \cos \tfrac{1}{2}c$$
$$\text{tg}\ r = 2 \sin \tfrac{1}{2}\alpha.\ \sin \tfrac{1}{2}\beta.\ \sin \tfrac{1}{2}\gamma$$

Men kan dan ook E, R en r in de parameters u_i uitdrukken. Een resultaat is nog

$$\text{cotg}\, \tfrac{1}{2}\, E = \frac{u_1^2(u_2 + u_3) + u_2^2(u_3 + u_1) + u_3^2(u_1 + u_2) - 2u_1\, u_2\, u_3}{(u_1 - u_2)\,(u_1 - u_3)\,(u_2 - u_3)}$$

DE DISCUSSIE-NOTA'S

Aan alle wiskunde leraren bij het v.h.m.o. is de volgende brief verzonden:

Aan de leden van Wimecos, Liwenagel en de Wiskunde Werkgroep van de WVO, aan de wiskundelereren van Nederlandse scholen voor VHMO.

De besturen van Wimecos, Liwenagel en de Wiskunde Werkgroep van de WVO menen er goed aan te doen, een gecombineerde ledenvergadering te organiseren ter bespreking van de discussienota's behorende bij het Interimrapport van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.

Deze gecombineerde ledenvergadering zal worden gehouden op *30 oktober a.s.* in de Blauwe Zaal (400 zitplaatsen) van „*Esplanade*" te Utrecht.

Van 10.30-12.30 uur zal gesproken worden over de nota's betreffende het vwo; van 14.00-15.00 uur zal de nota over de brugklasse en van 15.00-17.00 uur zullen die van het havo aan de orde worden gesteld.

Een forum, bestaande uit leden van de Commissie of samenstellers van de nota's, zal vragen van leden beantwoorden, en opmerkingen, suggesties en bezwaren in ontvangst nemen of weerleggen.

Hierdoor kan worden bereikt, dat de wiskundeleraren hun bijdrage leveren tot de beslissingen van de verantwoordelijke instanties.

Ter bevordering van de efficiëntie der discussies, is het wenselijk dat vragen, opmerkingen en suggesties schriftelijk worden ingediend. Wij zullen het op prijs stellen,

als opmerkingen en vragen betreffende verschillende hoofdstukken of afdelingen op verschillende vellen papier worden vermeld; zij dienen *uiterlijk 1 oktober a.s.* in het bezit te zijn van de secretaris van Wimecos, drs. A. Maassen, Bosboomstraat 20, Arnhem.

Om een indruk te krijgen van het aantal deelnemers, verzoeken wij degenen die deze vergadering willen bijwonen, zich aan te melden door invulling en verzending *voor 15 sptember 1967* van het bijgaande formulier.

Wij stellen ons voor, begin oktober aan alle deelnemers uitnodigingskaarten te versturen. Indien het aantal aanmeldingen groter is dan vierhonderd, zullen de uitnodigingen verzonden worden in de volgorde van de aanmeldingen.

Als u nog geen lid bent van een der organiserende verenigingen, kunt u zich door middel van de bijgevoegde kaart als lid aanmelden; u kunt dan tegelijk laten weten, dat u de gecombineerde ledenvergadering wilt bijwonen.

Namens de besturen, dr. ir. B. Groeneveld (Wimecos)
D. Leujes (Liwenagel)
drs. H. C. Vernout (Werkgroep WVO)

P.S. Voor de gegevens betreffende Wimecos: zie jaarboekje 1967, pag 64
Voor de gegevens betreffende Liwenagel: zie jaarboekje 1967, pag 22
Voor de gegevens betreffende de WVO: zie jaarboekje 1967, pag. 83

BOEKBESPREKING

Dr. J. J. Verdonk, *Petrus Ramus en de wiskunde*, Van Gorcum & Comp. N.V., Assen, 1966; X + 455 blz. Ing. *f* 34,90.

Dit boek is het proefschrift waarop collega Verdonk in december te Amsterdam gepromoveerd is; promotor was professor R. Hooykaas.

Ramus is in 1515 geboren en op 26 augustus 1572, in de beruchte Bartholomeusnacht, te Parijs vermoord. Hij was tot nu toe vooral bekend als filosoof met interesse voor de wiskunde en die daar ook enkele leerboeken over geschreven heeft. Dr. Verdonk laat in een boeiende biografie, die ons in een deel van het 16e-eeuwse Parijse universitaire leven binnenleidt, zien hoe Ramus steeds meer overtuigd raakte van het belang van een goed en hoogstaand wiskunde-onderricht. Daartoe bestudeerde Ramus de bestaande werken, hij overwoog wat al dan niet belangrijk was of didaktisch gewenst en stelde zo volgens een zeer persoonlijke methodiek een leerboek over rekenkunde en een over meetkunde samen. Van het eerste verzorgde hij zelf vier uitgaven (de eerste verscheen in 1555 te Parijs) en Dr. Verdonk laat aan de hand der opvolgende uitgaven zien hoe Ramus' inzichten groeiden. Van zijn meetkundeboek verzorgde hij zelf maar één uitgave. De deduktieve methode van Euclides laat hij, om didaktische redenen, vallen; ook voegt hij enkele praktische onderwerpen in, bijv. over landmeetkunde. Om deze aanpak, die belangstellenden bij eerste kennismaking meer aansprak dan Euclides' *Elementen*, werd hij nogal geprezen en zijn boek kende vele heruitgaven.

Een bewerking van zijn *Arithmetica* is in 1584 te Leiden herdrukt ten behoeve van Rudolf Snellius voor diens onderwijs aan de jonge universiteit. Van de *Geometria* verscheen in 1622 te Leiden een Nederlandse vertaling.

Uit bovenstaande zal duidelijk zijn, dat we de verdiensten van Ramus voor de wiskunde niet moeten zoeken in oorspronkelijke bijdragen maar juist in zijn methodiek en didaktiek. In een laatste hoofdstuk (blz. 320—395) gaat Dr. Verdonk daar nog eens uitvoerig op in. Omdat het zoeken naar een goede methodiek en didaktiek van het wiskunde-onderricht nog steeds gaande is — en dat ook altijd wel zal blijven — zullen zeker vele collega's met interesse kennis kunnen nemen van de pogingen, die Ramus, als een der eersten, daartoe aanwendde. Hun zij het hier besproken boek aanbevolen. Collega Verdonk wensen wij geluk met zijn zeer verantwoorde en fraai uitgegeven studie.

A. J. E. M. Smeur

D. Leujes, *Complexe getallen*, Noorduijn en Zoon, Gorinchem, 1967, *f* 2,50.

In zijn voorwoord drukt Leujes er zijn spijt over uit, dat B-leerlingen zonder kennis van de complexe getallen de school verlaten. Hij heeft zich hierbij niet neergelegd en in werkweken de in dit boekje neergelegde stof met die leerlingen doorgenomen. Of de leerlingen het zelfstandig kunnen doorwerken — zoals de auteur beweert — waag ik te betwijfelen; Leujes spreekt waarschijnlijk over zijn Gymnasiale β leerlingen.

In Hoofdstuk I vertelt hij, hoe men in de wiskunde tot de complexe getallen is gekomen, d.i. via de oplossing van derdegraadsvergelijkingen volgens Cardano; die oplossing wordt dan ook gegeven; ook wordt — als toegift — gesproken over de oplossing van de vergelijking $x^3 + ax + b = 0$ met behulp van goniometrische formules volgens Viète.

In Hoofdstuk II volgt een systematische behandeling met behulp van geordende getallenparen, welke methode wordt ingeleid met behandeling van breuken. Bij die systematische behandeling komt het symbool „i" pas te voorschijn. Wij ontmoeten de formules van de Moivre en het complexe vlak (met optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling van complexe getallen).

Het woord „vector" zag ik niet; e-machten ook niet; draaiingen om andere punten dan de oorsprong ook niet; dat zal ter wille van de beperking voorschrift voor de schrijver zijn geweest. De vraagstukkenserie culmineert in enkele planimetrische exemplaren, waarbij als apotheose de rechte van Euler te voorschijn komt. Ik vraag mij — gezien de gegeven theorie — af, of de leerlingen bij het oplossen van deze slotsommen niet te veel planimetrie en te weinig complexe getallen (vectoren) zullen gebruiken. Ook had ik graag wat verrassender zaken aan de orde gesteld, vooral aan het eind van een werkweek, als de boog wat kan worden ontspannen. Ik denk bv. aan de „verloren schat" (Bottema, Verscheidenheden XXXVIII en XLII) en de vraagstukken over driehoeken en vierhoeken met aangeschoven vierkanten en gelijkzijdige driehoeken (zie Euclides 40, II pag. 48 — L. Kuipers), grapjes weliswaar, maar grapjes, die het aan het slot van een werkweek goed zouden doen.

Het is een plezierig werkje met voldoende functioneel vraagstukkenmateriaal; de leerlingen maken kennis met voorlopig zinloze zaken, die achteraf in verschillende gebieden (planimetrie-goniometrie-algebra) toepassing vinden. Wij hopen met de auteur, dat dat voor althans enkelen hunner een opzienbaring betekent, die de uitgave van de *f* 2,50 rechtvaardigt. Enig vertrouwen heb ik daar wel in.

Groenman

Lothar Collatz, *Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Stuttgart 1967, 3de druk, 226 blz., DM 24,60.

In de 37ste jaargang van dit tijdschrift, 1961/62 wordt op blz. 302 een bespreking aan dit boek gewijd, waarnaar ik meen te mogen verwijzen.

Egmont Colerus, *Van 1×1 naar Integraal*, bewerkt door J. A. A. Verlinden. H. Nelissen, Bilthoven, 13de druk, 240 + 53 blz. *f* 9,75.

Dat een 13de druk verscheen is een afdoend bewijs voor de populariteit van dit boek. In deze 13de druk is door de bewerker een 190 tal vraagstukken toegevoegd, met een lijst van antwoorden.

Burgers

W. Schaafsma, *Hypothesis testing problems with the alternative restricted by a number of inequalities.*

De problemen welke worden genoemd in de titel van dit proefschrift worden opgelost via een afvalsysteem. Uitgegaan wordt van de klasse van alle toetsen. Door nu een aantal eisen op tafel te leggen waaraan een redelijke toets geacht wordt te voldoen, lukt het de schrijver uiteindelijk een deelverzameling van toetsen over te houden, waaruit hij de beste toets kan lichten. Het geheel is niet eenvoudig, maar voor de specialist zeker interessant.

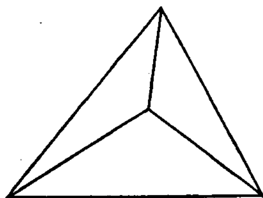
P. C. Sander

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

181. Gevraagd wordt een convexe veelhoek zo in driehoeken te verdelen, dat in elk hoekpunt evenveel zijden samenkomen. (Geen hoekpunt van een driehoek mag een zijde van een andere driehoek in twee delen verdelen.)

Een voorbeeld van een dergelijke verdeling vindt u in bijgaande figuur. Hierin is uitgegaan van een driehoek; deze is in driehoeken verdeeld op zodanige manier, dat in elk punt drie zijden samenkomen.



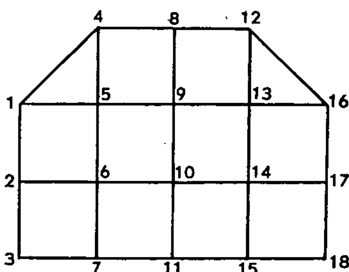
Gevraagd wordt nu een overzicht te geven over alle mogelijkheden.

182. Gegeven zijn 9 rechthoekige fiches met breedte 1 cm en lengte 4 cm. Pas deze zo aan elkaar, dat er een vierkant van 36 cm² ontstaat.

Pas 36 van deze fiches zo aan elkaar, dat er een vierkant van 144 cm² ontstaat. En ook 81 zo, dat er een vierkant van 324 cm² ontstaat.

OPLOSSINGEN

179. In onderstaande figuur bevindt de wolf zich in 9 en het schaap in 11. Om beurten doorlopen beide een lijnstuk; de wolf begint. De wolf tracht het schaap te vangen; het schaap tracht te ontkomen. Wat is voor beide de beste speelwijze? Hoe loopt het spel af?



Stel de lengte van de zijden van de vierkantjes 1, denk een x-as en een y-as aangebracht evenwijdig met de zijden van de vierkanten en definieer de afstand van de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) door

$$d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

De enige winnende standen voor de wolf zijn: wolf op 6, schaap op 3, schaap aan zet en wolf op 14, schaap op 18, schaap aan zet. Dan is $d = 2$ (d stelt de afstand van wolf en schaap voor.)

In het begin is, zodra het schaap aan zet is, d oneven. Om deze afstand even te krijgen, moet wolf 1–4 of 12–16 doorlopen. Dus begint wolf 9–5–1–4 te doorlopen. Daarna is d als schaap aan zet is even, en wel 6 of 4 of 2. Wolf zal nu:

d reduceren van 6 tot 4 en van 4 tot 2,

zodra $d = 2$ trachten met schaap in twee overstaande hoekpunten van hetzelfde vierkant te komen,

schaap drijven naar 3 of 18.

Daarbij is het steeds mogelijk schaap te verhinderen 1–4 of 12–16 te doorlopen. Wolf wint dus.

Begint schaap op 9 en wolf op 11, dan zal het voor schaap steeds mogelijk, zijn, zodra wolf 1–4 doorloopt zelf 12–16 te doorlopen (of omgekeerd). De wolf zal het schaap niet kunnen vangen.

180. Opgave in het vorige nummer.

Neen. B.v. is het volgende stel geen representatie van een veelvlak:

$$(ABC)\ (ACD)\ (ADB)\ (AEF)\ (AFG)\ (AGE)\ (BCD)\ (EFG).$$

Meetkundig geïnterpreteerd staat hier een tweetal viervlakken met een gemeenschappelijk hoekpunt.

Vindt men dit kinderachtig, dan kan men de vlakken BCD en EFG vervangen door drie vierhoeken:

$$(ABC)\ (ACD)\ (ADB)\ (AEF)\ (AFG)\ (AGE)\ (BCFE)\ (CDGF)\ (DBEG).$$

Dat het laatste stelsel geen representatie toelaat, ziet men door op te merken, dat de ribben van een veelvlak, die in een hoekpunt samenkomen, cyclisch gerangschikt kunnen worden op een zodanige manier, dat opvolgende ribben samen in hetzelfde zijvlak liggen. Dit is in ons voorbeeld niet mogelijk. We krijgen immers

$$(AB, AC, AD)\ (AE, AF, AG).$$